

مسأله ۲ - (خرداد ماه ۱۴۰۱) - اگر بین دو عدد حقیقی x و y رابطه‌ی $5x - y = 10$ برقرار باشد، مقادیر x و y را طوری به دست آورید که حاصل ضرب این دو عدد مینیمم گردد.

حل: حاصل ضرب x و y را S می‌نامیم.

$$5x - y = 10 \implies y = 5x - 10$$

$$\implies S = xy = x(5x - 10) = 5x^2 - 10x \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$$

$$S' = 10x - 10 \stackrel{S'=0}{\implies} 10x - 10 = 0 \implies x = 1 \implies y = 5(1) - 10 = -5$$

حل مسأله تمام شد و سعی می‌کنیم تمام کارهایی که در حل مسأله انجام شد را به صورت مرحله به مرحله و جزء به جزء توضیح دهیم.

حل با توضیحات: همان طور که در ویدئوها بیان شد برای حل یک مسأله بهینه سازی باید ۶ مرحله را طی کرد. سعی می‌کنیم این ۶ مرحله را در حل این مسأله اجرا کنیم.

مرحله ۱: به صورت مسأله نگاه می‌کنیم تا بدانیم چه چیزی می‌خواهیم بیشترین مقدار یا کمترین مقدار ممکن شود. پاسخ روشن است. می‌خواهیم حاصل ضرب اعداد x و y مینیمم شود. بنابراین اگر قرار دهیم $S = xy$ ، می‌خواهیم S کمترین مقدار ممکن شود.

مرحله ۲: باید به این سؤال پاسخ دهیم که S به چه پارامترهایی وابسته است.

با توجه به صورت مسأله واضح است که S به x و y وابسته است.

مرحله ۳: بررسی می‌کنیم که چه ارتباطی بین x و y وجود دارد.

این رابطه در صورت مسأله به صورت $5x - y = 10$ داده شده است که از آن نتیجه می‌شود $y = 5x - 10$.

مرحله ۴: سعی می‌کنیم فرمولی برای S بر حسب یک پارامتر (x یا y) بنویسیم.

قبل از این در مرحله‌ی ۱ دیدیم که $S = xy$ و از طرفی در مرحله‌ی ۳ دیدیم که $y = 5x - 10$. در نتیجه

$$S = xy = x(5x - 10) = 5x^2 - 10x$$

مرحله ۵: حال نوبت آن است که با توجه به اینکه S را بر حسب x نوشته‌ایم، بدانیم پارامتر x چه مقادیری می‌تواند داشته باشد.

در صورت مسأله ذکر شده است که x و y اعداد حقیقی هستند و مشخص است که محدودیتی برای آنها وجود ندارد. بنابراین $x \in \mathbb{R}$ یعنی دامنه‌ی اعتباری $\mathbb{R}$ است.

مرحله ۶: با توجه به اینکه $S = 5x^2 - 10x$ ، سعی می‌کنیم با محاسبه‌ی S' و یافتن نقاط بحرانی، حداقل مقدار S را به دست آوریم.

$$S' = 10x - 10 \stackrel{S'=0}{\implies} 10x - 10 = 0 \implies x = 1$$

در صورت مسأله می‌بینیم که از ما جدول تغییرات نخواسته است. بنابراین حل مسأله تمام است و می‌توان گفت که به ازای $x = 1$ کمترین مقدار S را داریم. توجه داشته باشید که مقادیر x و y مد نظر مسأله است بنابراین لازم است y را هم به دست آوریم. در مرحله‌ی ۴ دیدیم که $y = 5x - 10$ که با قرار دادن $x = 1$ در آن داریم $y = 5(1) - 10 = -5$.