

مسأله ۳ - (دی ماه ۱۴۰۲) - می‌خواهیم یک قوطی استوانه‌ای شکل و در باز بسازیم، طوری که گنجایش آن دقیقاً ۹۰۰ سانتی‌متر مکعب باشد. ابعاد قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به کار رفته در تولید آن مینیمم شود؟ ($\pi \approx 3$)

حل: شعاع قاعده‌ی استوانه را x و ارتفاع آن را y و مساحت فلز به کار رفته را S می‌نامیم.

$$\pi x^2 y = 900 \Rightarrow y = \frac{900}{\pi x^2}$$

$$\Rightarrow S = \pi x^2 + 2\pi xy = \pi x^2 + 2\pi x \times \frac{900}{\pi x^2} = \pi x^2 + \frac{1800}{x} \quad ; \quad x > 0$$

$$S' = 2\pi x - \frac{1800}{x^2} \stackrel{S'=0}{\Rightarrow} 2\pi x - \frac{1800}{x^2} = 0 \Rightarrow 2\pi x = \frac{1800}{x^2} \Rightarrow 2\pi x^3 = 1800$$

$$\Rightarrow x^3 = \frac{900}{\pi} \stackrel{\pi \approx 3}{\Rightarrow} x^3 \approx 300 \Rightarrow x \approx \sqrt[3]{300} \Rightarrow y \approx \frac{900}{\sqrt{(300)^2 \pi}} \approx \frac{300}{\sqrt{(300)^2}} = \sqrt[3]{300}$$

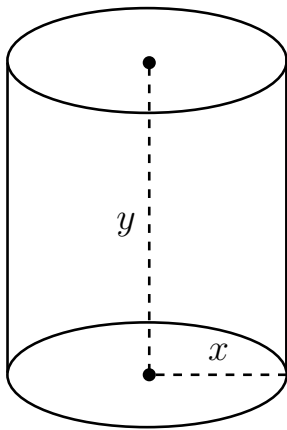
حل مسأله تمام شد و سعی می‌کنیم تمام کارهایی که در حل مسأله انجام شد را به صورت مرحله به مرحله و جزء به جزء توضیح دهیم.

حل با توضیحات: همان طور که در ویدئوها بیان شد برای حل یک مسأله بهینه سازی باید ۶ مرحله را طی کرد. سعی می‌کنیم این ۶ مرحله را در حل این مسأله اجرا کنیم.

مرحله ۱: به صورت مسأله نگاه می‌کنیم تا بدانیم چه چیزی می‌خواهیم بیشترین مقدار یا کمترین مقدار ممکن شود. پاسخ روشن است. می‌خواهیم مقدار فلز به کار رفته در تولید قوطی استوانه‌ای در باز کمترین مقدار ممکن شود. واضح است که هر چه مساحت فلز به کار رفته کمتر باشد، مقدار فلز به کار رفته هم کمتر خواهد بود. بنابراین اگر S را مساحت فلز به کار رفته بگیریم، می‌خواهیم S کمترین مقدار ممکن شود.

مرحله ۲: باید به این سؤال پاسخ دهیم که S به چه پارامترهایی وابسته است.

با توجه به اینکه می‌خواهیم قوطی استوانه‌ای بسازیم، مساحت آن به شعاع قاعده (x) و ارتفاع (y) وابسته است.



مرحله ۳: بررسی می‌کنیم که چه ارتباطی بین x و y وجود دارد.

با توجه به اینکه می‌خواهیم حجم قوطی 900 cm^3 باشد، باید داشته باشیم $\pi x^2 y = 900$. (حجم استوانه برابر است با مساحت قاعده ضربدر ارتفاع)

مرحله ۴: سعی می‌کنیم فرمولی برای S بر حسب یک پارامتر (x یا y) بنویسیم.

می‌دانیم که مساحت استوانه‌ی در باز برابر است با مجموع مساحت قاعده و مساحت جانبی آن. مساحت قاعده برابر است با πx^2 و مساحت جانبی برابر است با $2\pi xy$. پس $S = \pi x^2 + 2\pi xy$.

در اینجا S بر حسب x و y است و باید سعی کنیم که S را بر حسب x یا y بنویسیم. در مرحله‌ی ۳ دیدیم که $\pi x^2 y = 900$ که از آن نتیجه می‌شود $y = \frac{900}{\pi x^2}$.

$$\Rightarrow S = \pi x^2 + 2\pi xy = \pi x^2 + 2\pi x \times \frac{900}{\pi x^2} = \pi x^2 + \frac{1800}{x}$$

مرحله ۵: حال نوبت آن است که با توجه به اینکه S را بر حسب x نوشته‌ایم، بدانیم پارامتر x چه مقداری می‌تواند داشته باشد.

چون x شعاع قاعده است، مسلماً باید x عددی مثبت باشد و از طرفی x هر عدد مثبتی می‌تواند باشد. پس دامنه‌ی اعتباری برای S بازه‌ی $(0, +\infty)$ است.

مرحله ۶: با توجه به اینکه

$$S = \pi x^2 + \frac{1800}{x} \quad ; \quad x > 0$$

سعی می‌کنیم با محاسبه‌ی S' و یافتن نقاط بحرانی، حداقل مقدار S را به دست آوریم.

$$S' = 2\pi x - \frac{1800}{x^2} \stackrel{S'=0}{\implies} 2\pi x - \frac{1800}{x^2} = 0 \implies 2\pi x = \frac{1800}{x^2} \implies 2\pi x^3 = 1800$$

$$\implies x^3 = \frac{900}{\pi} \stackrel{\pi \approx 3}{\implies} x^3 \approx 300 \implies x \approx \sqrt[3]{300}$$

در صورت مسئله می‌بینیم که از ما جدول تغییرات نخواسته است. بنابراین حل مسئله تمام است و می‌توان گفت که به ازای $x \approx \sqrt[3]{300}$ کمترین مقدار S را داریم. توجه داشته باشید که مسئله از ما ابعاد قوطی یعنی شعاع قاعده و ارتفاع را خواسته است بنابراین لازم است y را هم به دست آوریم.

در مرحله‌ی ۴ دیدیم که $y = \frac{900}{\pi x^2}$ که با قرار دادن $x \approx \sqrt[3]{300}$ و $\pi \approx 3$ در آن داریم $\sqrt[3]{300} = \frac{300}{\sqrt[3]{(300)^2}} \approx \frac{900}{\sqrt[3]{(300)^2} \pi} \approx y$