

مسأله ۴ - (دی ماه ۱۴۰۳) - طول مستطیلی را بیابید که مساحت آن ۱۶ سانتی متر مربع و محیط آن کمترین مقدار ممکن گردد.

حل: اگر طول مستطیل را x و عرض آن را y و محیط آن را P بگیریم، آنگاه $P = 2(x + y)$ و می‌خواهیم P مینیمم شود.

$$xy = 16 \Rightarrow y = \frac{16}{x} \Rightarrow P = 2(x + y) = 2\left(x + \frac{16}{x}\right) = 2x + \frac{32}{x}$$

$$P' = 2 - \frac{32}{x^2} \stackrel{P'=0}{\Rightarrow} 2 - \frac{32}{x^2} = 0 \Rightarrow 2 = \frac{32}{x^2} \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$$

حل مسأله تمام شد و سعی می‌کنیم تمام کارهایی که در حل مسأله انجام شد را به صورت مرحله به مرحله و جزء به جزء توضیح دهیم.

حل با توضیحات: همان طور که در ویدئوها بیان شد برای حل یک مسأله بهینه سازی باید ۶ مرحله را طی کرد. سعی می‌کنیم این ۶ مرحله را در حل این مسأله اجرا کنیم.

مرحله ۱: به صورت مسأله نگاه می‌کنیم تا بدانیم چه چیزی می‌خواهیم بیشترین مقدار یا کمترین مقدار ممکن شود. پاسخ روشن است. می‌خواهیم محیط مستطیل مینیمم شود. پس اگر طول مستطیل را x و عرض آن را y و محیط آن را P بگیریم، آنگاه $P = 2(x + y)$ و می‌خواهیم P مینیمم شود.

مرحله ۲: باید به این سؤال پاسخ دهیم که P به چه پارامترهایی وابسته است.

واضح است که P به x و y وابسته است.

مرحله ۳: بررسی می‌کنیم که چه ارتباطی بین x و y وجود دارد.

با توجه به اینکه می‌خواهیم مساحت مستطیل ۱۶ باشد، داریم $xy = 16$ که از آن نتیجه می‌شود $y = \frac{16}{x}$.

مرحله ۴: سعی می‌کنیم فرمولی برای P بر حسب یک پارامتر (x یا y) بنویسیم.

قبل از این در مرحله ۱ دیدیم که $P = 2(x + y)$ و از طرفی در مرحله ۳ دیدیم که $y = \frac{16}{x}$. در نتیجه

$$P = 2(x + y) = 2\left(x + \frac{16}{x}\right) = 2x + \frac{32}{x}$$

مرحله ۵: حال نوبت آن است که با توجه به اینکه P را بر حسب x نوشته‌ایم، بدانیم پارامتر x چه مقادیری می‌تواند داشته باشد.

با توجه به اینکه x نمی‌تواند عددی کوچکتر از ۴ باشد، (اگر $x < 4$ آنگاه با توجه به تساوی $y = \frac{16}{x}$ ، عرض مستطیل یعنی y عددی بزرگتر از طول آن خواهد بود.) دامنه‌ی اعتباری بازه‌ی $[4, +\infty)$ است.

مرحله ۶: با توجه به اینکه $P = 2x + \frac{32}{x}$ ، سعی می‌کنیم با محاسبه‌ی P' و یافتن نقاط بحرانی، حداقل مقدار P را به دست آوریم.

$$P' = 2 - \frac{32}{x^2} \stackrel{P'=0}{\Rightarrow} 2 - \frac{32}{x^2} = 0 \Rightarrow 2 = \frac{32}{x^2} \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$$

در صورت مسأله می‌بینیم که از ما جدول تغییرات نخواستند. بنابراین حل مسأله تمام است و می‌توان گفت که به ازای $x = 4$ کمترین مقدار P را داریم.